

Contrôle continu n°1

Exercice1

On se propose d'étudier la suite  $(u_n)_n$  définie par

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, +\infty[, \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{u_n^2}{2}. \end{cases}$$

On définit la fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2}$ .

1. Montrer que  $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$ . Donner les solutions  $0 < \alpha < \beta$  de l'équation  $f(x) = x$ .
2. Montrer que

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - \alpha)(u_n - \beta), \\ u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(u_n - \alpha)(u_n + \alpha). \end{cases}$$

3. Montrer que si  $u_0 \in ]0, \alpha[$ , la suite  $(u_n)_n$  est croissante et majorée. Calculer sa limite.
4. Etudier la suite  $(u_n)_n$  si  $u_0 \in ]\alpha, \beta[$ .
5. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  quand  $u_0 > \beta$ .

Exercice2

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{3x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  n'est pas continue en 0.
2. Montrer que la fonction  $g : x \rightarrow \sqrt{|x|}f(x)$  est continue en 0.

Exercice3

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < a < b$ . On considère les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  définies par

$$\begin{cases} u_0 = a, & v_0 = b, \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, & v_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}} \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence, que

$$u_n < v_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer que  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont deux suites adjacentes.

3. On pose  $a = b \cos \alpha$ ;  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Montrer, par récurrence, que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x \sum \wedge$

$$\begin{aligned} u_n &= v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}, \\ v_n &= b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n}. \end{aligned}$$

4. En déduire, utilisant la relation  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ ;  $\theta \in \mathbb{R}$ , que

$$v_n = b \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}.$$

5. Calculer la limite commune des suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$ .



Exercice 1  $u_0 > 0$   $U_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{U_n^2}{2}$  ;  $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2}$

1/  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ . ( $\because \forall x \in [0, +\infty[ : f'(x) = x > 0$ )  
donc  $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [\frac{1}{4}, +\infty[ \subset [0, +\infty[$

•  $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} = x \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4} = 0$  ;  $\Delta = 8$  ;

$\alpha = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$  ;  $\beta = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$   $S' = \{\alpha, \beta\}$

2/  $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{1}{2}(U_n - \alpha)(U_n - \beta)$  car  $f(x) = \frac{1}{2}(x - \alpha)(x - \beta)$

$U_{n+1} - \alpha = f(U_n) - f(\alpha) = \left(\frac{1}{4} + \frac{U_n^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{U_n^2 - \alpha^2}{2} = \frac{1}{2}(U_n - \alpha)(U_n + \alpha)$

( $\alpha$  racine de l'équation  $f(x) = x$  c'ad  $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{2}$ )

3/ \* P. que  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < \alpha$ .

• On a  $u_0 \in ]0, \alpha[$  c'ad  $0 < U_0 < \alpha$

• Supp.  $0 < U_n < \alpha$  et m. que  $0 < U_{n+1} < \alpha$

Or  $0 < U_n < \alpha$  et  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $f(0) < f(U_n) < f(\alpha)$

c'ad  $\frac{1}{4} < U_{n+1} < \alpha$  d'où  $0 < U_{n+1} < \alpha$

\* P. que  $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} > U_n$

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \geq 0$  car  $0 < U_n < \alpha$

$x$	0	$\alpha$	$\beta$	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-	+

( $\forall x \in ]\alpha, +\infty[ : f(x) - x < 0$ )

\*  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$

la suite  $(U_n)$  est croissante et majorée donc  $(U_n)$  est convergente vers  $l$   
avec  $0 \leq l \leq \alpha$  et  $l = f(l)$  d'où  $l = \alpha$  d'après 1/

4/ + P. que  $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha < U_n < \beta$

•  $u_0 \in ]\alpha, \beta[$  ;  $\alpha < U_0 < \beta$

• Supp.  $\alpha < U_n < \beta$  et m. q.  $\alpha < U_{n+1} < \beta$

Or  $\alpha < U_n < \beta$  et  $f$  est décroissante sur  $]\alpha, \beta[$  donc  $f(\beta) < f(U_n) < f(\alpha)$

c'ad  $\beta < U_{n+1} < \alpha$  ; Or  $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < U_{n+1} < \beta$

+ P. que  $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} < U_n$

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$  car  $0 < U_n < \beta$  ( $\forall n \in ]\alpha, \beta[ : f(x) - x < 0$ )

On a  $(U_n)$  décroissante et minorée par  $\alpha$  donc  $(U_n)$  est convergente vers  $l$  ;  $\alpha \leq l \leq \beta$  et  $l = f(l)$  d'où  $l = \alpha$  ou  $l = \beta$ .  
Comme  $(U_n)$  est décroissante alors  $\lim U_n = \alpha$

5/ + P. que  $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > \beta$

•  $U_0 > \beta$  évident

• Supp  $U_n > \beta$  alors  $f(U_n) > f(\beta)$  car  $U_{n+1} > \beta$  ( $f \uparrow$  sur  $[\beta, +\infty[$ )

\* P. que  $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} > U_n$

•  $U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 > 0$  car  $f(x) - x > 0 \quad \forall x \in ]\beta, +\infty[$

• Supp  $U_{n+1} > U_n$  alors  $f(U_{n+1}) > f(U_n)$  car  $U_{n+2} > U_{n+1}$

\* la suite  $(U_n)$  est croissante et non majorée (car  $f(x)$  est non majorée sur  $\mathbb{R}^+$ )  
donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

Exercice 2  $f(x) = \cos \frac{1}{3x} \quad x \neq 0 ; \quad f(0) = 0$

1/ Considérons la suite  $x_n = \frac{1}{3n\pi}$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  et  $f(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$   
n'a pas de limite (les 2 suites extraites  $f(x_{2n}) = 1$  et  $f(x_{2n+1}) = -1$  n'ont pas la même limite)

2/  $\forall x \neq 0, |g(x)| = \sqrt{|x|} \cdot |f(x)| = \sqrt{|x|} \cdot |\cos \frac{1}{3x}| \leq \sqrt{|x|}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$  donc  $g$  est cont en 0





ETUSUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Diapo  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..